



صحیح یا غلط بودن عبارات زیر را مشخص کنید؟

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = x$$

الف) در تابع $f(x) = 4 + \sqrt{x-1}$ دامنه تابع $y = (f^{-1} \circ f)(x)$ برابر $[1, +\infty)$ است. ص

$$x-1 \geq 0$$

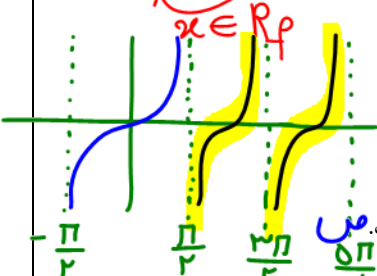
$$x \geq 1$$

ب) بیشمار تابع هم صعودی و هم نزولی وجود دارد. ص

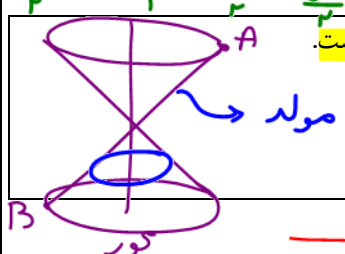
$$c \in D_f \quad f'(c) = 0$$

پ) هر نقطه بحرانی اکسترمم نسبی است. غ

ت) تابع تانژانت روی دامنه اش صعودی اکید است $y = \tan x$ $D_f = \mathbb{R} - \{x = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ ص



ث) اگر صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولد موازی نباشد و از راس نگذرد سطح مقطع بیضی است. ص



اگر صفحه P سطح مخروطی را هم در قسمت بالایی و هم پایینی قطع کند و از راس نگذرد سطح مقطع هذلولی است.

اگر صفحه P با مولد موازی و از راس نگذرد سطح مقطع سهمی است.

اگر صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود و از راس نگذرد سطح مقطع دایره است.

شرط لازم مشتق پذیری میرستگی

ج) تابع $y = \sqrt[3]{x}$ در نقطه $x=0$ مشتق پذیر نیست ولی در این نقطه خط مماس وجود دارد. ص

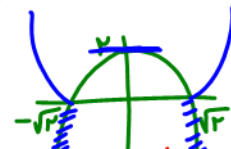
چ) اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند آنگاه همواره رابطه $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ همواره برقرار است. غ

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

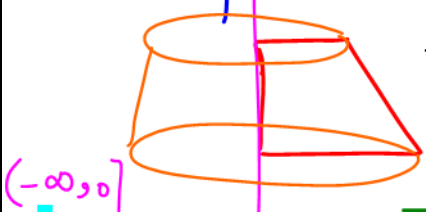
$$y = |x|$$



الف) نقاط گوشه ای تابع $f(x) = |2-x^2|$ برابر $\pm\sqrt{2}$ هستند.

ب) هرچه خروج از مرکز یک بیضی به سمت صفر میل کند شکل بیضی به \dots نزدیکتر می شود. دایره

پ) شکل حاصل از دوران یک دوزنقه قائم الزاویه حول ساق قائم \dots مخروط ناقص است.



ت) حد راست تابع $y = \tan x$ در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ برابر $\dots = \infty$ است.

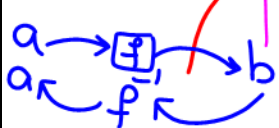
$$x = \frac{\pi}{2}$$

ث) تابع $y = x^2|x|$ در بازه $(-\infty, a]$ نزولی اکید است حداکثر مقدار a برابر \dots صفر است.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$$

ج) در بازه $(0, \infty)$ تابع $y = x^2$ بالاتر تابع $y = x^3$ است.

چ) اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3 = 5$ و $g(x) = x^3 = 48$ باشند حاصل $(g^{-1} \circ f^{-1})(5)$ برابر \dots است.



$$(a, b) \in f$$

$$(b, a) \in f^{-1}$$

ح) وارون تابع $f(x) = x^2 - 2x + 2$ با شرط $x \geq 1$ برابر $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 1$ است.



$$\Rightarrow y = (x-1)^2 - 1 + 2 \Rightarrow y-1 = (x-1)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{y-1} \Rightarrow x = \sqrt{y-1} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 1$$



$$(-3, 1] \rightsquigarrow [-2, 4) \rightsquigarrow [1, 9)$$

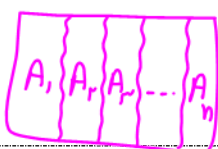
دبیرستان دوره دوم امام صادق (ع)

شبهه ساز امتحان نهایی

(خ) اگر برد تابع $f(x)$ به صورت $(-3, 1]$ باشد برد تابع $y = -2f(3x-1) + 3$ برابر $[1, 9)$ است.

(د) اگر A مجموعه اعداد طبیعی اول و B مجموعه اعداد طبیعی مرکب و مجموعه C برابر $\{ \dots \}$ باشد آنگاه A و B و C یک افزاز برای

مجموعه اعداد طبیعی هستند.

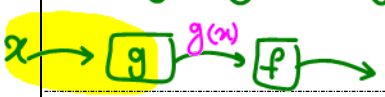


$$\bigcup_{i=1}^n A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = U$$

اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشند دامنه $f \circ g$ را به کمک تعریف بدست آورید؟

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \geq 1 \right\}$$



$$2x^2 \geq 2 \rightarrow x^2 \geq 1 \rightarrow |x| \geq 1$$

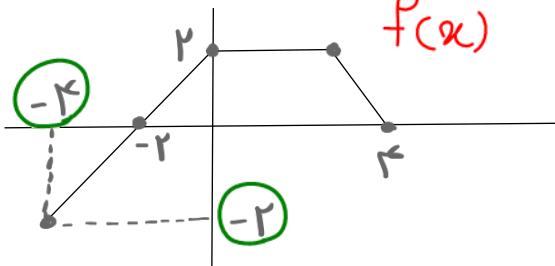
اگر $f(x) = 3x^2 - 6x + 14$ و $f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14$ باشند ضابطه $g(x)$ را بدست آورید؟

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 14$$

$$f(g(x)) = 3g(x)^2 - 6g(x) + 14 = 3x^2 - 6x + 14 \Rightarrow 3g(x)^2 - 6g(x) = 3x^2 - 6x + 14 - 14$$

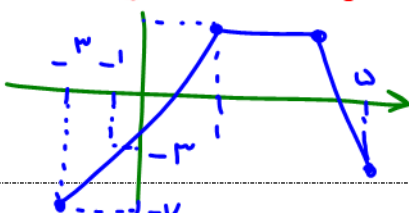
$$\Rightarrow g(x)^2 - 2g(x) = x^2 - 2x + 6$$

با توجه به نمودار تابع $f(x)$ نمودار تابع $y = 2f(x-1) - 3$ را رسم کنید؟



$\begin{vmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$	\rightarrow	$\begin{vmatrix} -3 \\ -7 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$	\rightarrow	$\begin{vmatrix} -3 \\ -7 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$	\rightarrow	$\begin{vmatrix} -3 \\ -7 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$	\rightarrow	$\begin{vmatrix} -3 \\ -7 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$	\rightarrow	$\begin{vmatrix} -3 \\ -7 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{vmatrix}$

ورودی: x
خروجی: y



نمودار مثلهای از جمله سوالات قطعی است:

$$y = a \sin bx + c$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$|a| = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}$$

$$y = a \cos bx + c$$

نمودار از منبر $\leftarrow \begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix}$ شروع $\leftarrow \cos$



تغییرات a, b, c

$y = \sin x$
تغییرات a, b, c

$\cos x$
 a, c

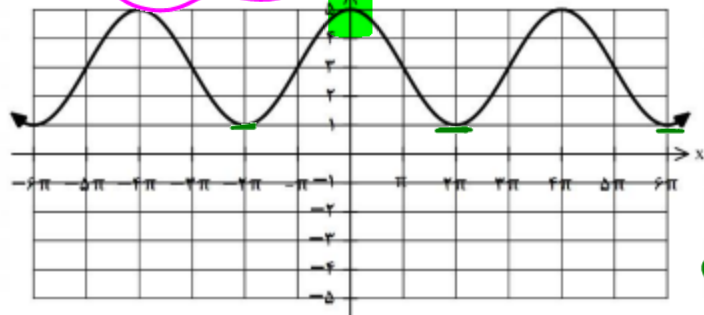


دبيرستان دوره دوم امام صادق (ع)

شبيهه ساز امتحان نهايي

ضابطه تابع مقابل را بنويسيد؟

$$y = 2 \cos \left(\frac{1}{2}x + \pi \right)$$



$$y = a \cos b x + c$$

$$|a| = \frac{2-1}{1} = 2 \rightarrow a = 2$$

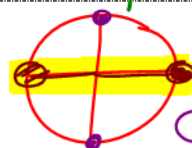
$$c = \frac{0+1}{1} = 1$$

$$2\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$\cos x = \cos \alpha$$

$$\cos 2x \rightarrow \begin{cases} 2\cos^2 x - 1 \\ 1 - 2\sin^2 x \end{cases} \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$



معادله مثلثاتي:

$$\cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = 1 \rightarrow x = 2k\pi$$

$$\cos x = -1 \rightarrow x = (2k+1)\pi$$

$$\sin x = 0 \rightarrow x = k\pi$$

معادلات مثلثاتي زير را حل كنيد؟

$$\cos 2x - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0 \rightarrow \cos x (2\cos x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\cos x = \cos 2x$$

$$2x = 2k\pi \pm x \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

مقدار $\sin 15^\circ$ را بدست آوريد؟

$$\cos 30^\circ = 1 - 2\sin^2 15^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sin^2 15^\circ \rightarrow 2\sin^2 15^\circ = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 15^\circ = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$



حاصل حدود زير را بدست آوريد؟

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 8x}{\sqrt[3]{x} - 2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x(x-8)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x})}{(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x})} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x(x-8)}{x-8} = \lim_{x \rightarrow 8} x = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{(x+2)(x-1)} \times \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x+\sqrt{x})}{(x+2)(x-1)(x+\sqrt{x})} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x] - 3}{|2x - 1|} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

$$ax^n + bx^{n-1} + \dots$$

$x \rightarrow \pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 4x^5}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\epsilon x^5}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \epsilon x^2 = +\infty$$

مشق: مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$

تعريف راياني $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

اگر $g(2) = 5$ و $g'(2) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \frac{3}{2}$ آنگاه مشتق تابع $h(x) = (f \circ g)(x)$ در $x=2$ بدست آوريد؟

$f'(5) = \frac{3}{2}$

$$f(g(x)) = g'(x) \times f'(g(x)) = 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

معادله خط مماس بر نمودار منحنی $y = x^2 + 3$ در نقطه ای به طول ۲ را به کمک تعريف بدست آوريد؟

معادله $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$

A/V

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3 - 7}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$$

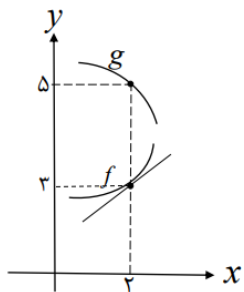
معادله خط مماس $y = 4x - 1$



شبيهه ساز امتحان نهايي

دبيرستان دوره دوم امام صادق (ع)

با توجه به نمودار های توابع $f(x)$ و $g(x)$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - 3g(x)}{x-2}$ چند برابر $f'(2)$ است؟



$$\lim_{x \rightarrow r} \frac{f(x)g(x) - f(r)g(x)}{x-r} = \lim_{x \rightarrow r} \frac{g(x)(f(x) - f(r))}{x-r}$$

$$g(r) = \Delta$$

$$f(r) = r$$

$$\lim_{x \rightarrow r} g(x) \times \lim_{x \rightarrow r} \frac{f(x) - f(r)}{x-r} = g(r) \times f'(r)$$

$$g(r) \times f'(r) - g(r) = \Delta$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'_+(a)$$

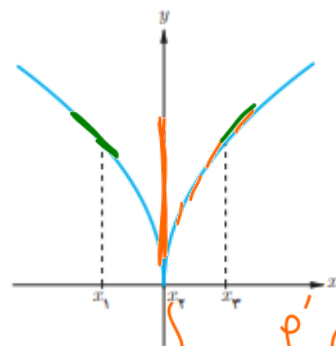
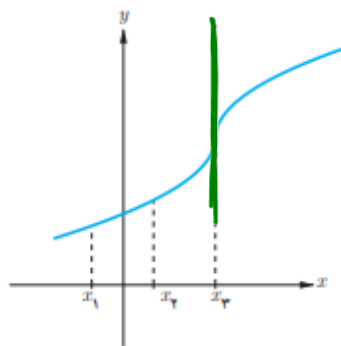
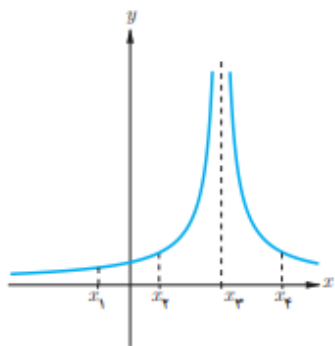
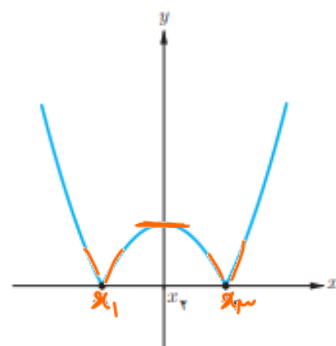
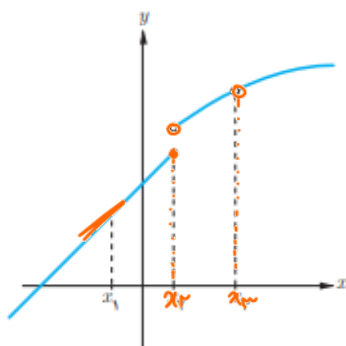
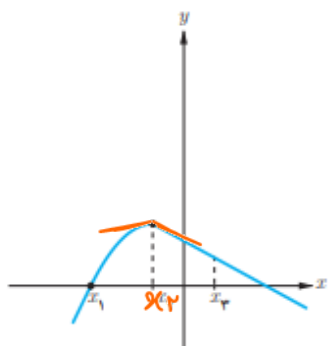
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'_-(a)$$

با استفاده از تعريف مشتق شيب نيم مماس چپ تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ را در $x=2$ بدست آوريد؟

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - 4|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+2)}{x-2} = -2$$



مشتق پذيري:



$$f'_+(x_2) = +\infty$$

$$f'_-(x_2) = -\infty$$



$$x^n \rightarrow n x^{n-1}$$

$$\sqrt{x} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{u} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{u}} \times u'$$

$$(u)^n = n u^{n-1} \times u'$$

شبهه ساز امتحان نهایی دبیرستان خرمدرم امام صادق (ع)

(ساده سازی الزامیست)

مشقت توابع زیر را بدست آورید؟

$$g(x) = (3x^2 - 4)(2x - 5)^3 = (6x)(2x - 5)^3 + 3(2x - 5)^2 \times 2x(3x^2 - 4)$$

$$f(x)g(x) = f(x)g(x) + f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{9x-2}{x+1}} \Rightarrow 2\sqrt{\frac{9x-2}{x+1}} \times \frac{9(x+1) - 1x(9x-2)}{(x+1)^2}$$

تابع $f(x) = x^2 - x$ را در نظر بگیرید:

A | x_0
| y_0
B | x_1
| y_1
آهنگ متوسط $\Rightarrow \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$
تغییرات

الف) آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه $[0, 2]$ را بدست آورید؟

ب) حدود x را چنان بیابید که آهنگ تغییر لحظه ای تابع از آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه $[0, 2]$ بیشتر باشد؟

$$\text{الف) } \frac{2 - 0}{2 - 0} = 1$$

$$\text{ب) } f'(x) = 2x - 1 > 1 \Rightarrow 2x > 2 \Rightarrow x > 1$$

کاربرد مشتق: نکته: نقاط سرته بازه به معنی میزان استریمیتی است.
1 مشتق \leftarrow نکته تجربی
2 جدول تغییرات برای f و f'

$$f(x) = 3x^2 + 2bx$$

اگر نقطه $(2, 1)$ نقطه اکسترمم نسبی $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد مقادیر b و d را بدست آورید؟

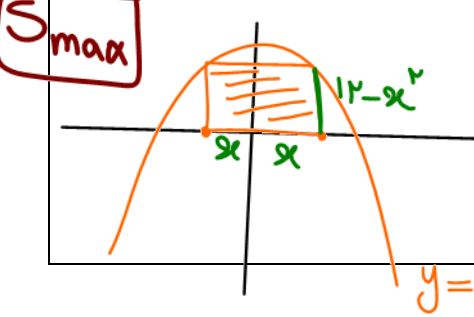
$$f'(2) = 0 \rightarrow 12 + 4b = 0 \rightarrow b = -3$$

$$f(2) = 1 \rightarrow 8 + 4b + d = 1 \rightarrow 4b + d = -7 \rightarrow d = 5$$

ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو راس آن روی محور x ها و دو راس دیگرش بالای محور x ها و روی سهمی $y = 12 - x^2$ باشد؟

بهینه سازی: بهترین ها و بدترین ها

عمیق: مساحت
صاف: حجم
صاف: مساحت جانبی
 $x = 2$
 $y = 8$
 S_{max}



$$S = 2x(12 - x^2) = -2x^3 + 24x$$

$$\Rightarrow S' = -6x^2 + 24 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

f'	-	+	-
f	+	-	+

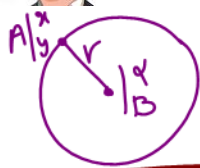
min → max →



شبهه ساز امتحان نهایی

مسائل مربوط به دایره و بیضی:

دبیرستان نوره دوم امام صادق (ع)



$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = r \rightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

$$r=5 \quad \text{center } (-1, -2) \rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \rightarrow \begin{cases} -\frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} \end{cases} \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$



$$MF + MF' = 2a$$

$$\begin{aligned} FF' &= 2c \\ AA' &= 2a \\ BB' &= 2b \end{aligned}$$

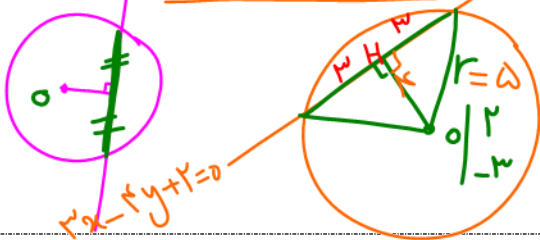
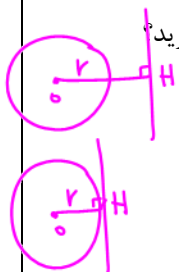
$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \left\{ \begin{aligned} e &= \frac{c}{a} \\ \text{روشنی} \\ \text{تاب} \\ \text{دایره} \end{aligned} \right.$$

$$MF + MF' = 2a$$

$$MF + MF' > 2a$$

$$MF + MF' < 2a$$

مرکز دایره ای نقطه $O = (2, -3)$ است. این دایره روی خط $3x - 4y + 2 = 0$ و تری به طول 6 جدا می کند معادله دایره را بدست آورید؟



$$OH = \frac{|3(2) - 4(-3) + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} = 4$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$$



وضعیت دو دایره $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ و $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ را مشخص کنید؟ $R + R' > OO'$ متقاطع



$OO' = R + R'$ مماس بیرون

$$OO' = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5} \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 - 0} = \sqrt{5}$$

$$R' = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 - 0} = \sqrt{5}$$

$OO' = R + R' \Rightarrow$ مماس بیرون



$OO' = |R - R'|$ مماس درون



معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $(-1, -1)$ و با دایره $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$ مماس درون باشد؟

$$OO' = |R - R'| < OO' < R + R' \quad OO' = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 36 + 12} = 4$$

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 11$$

$$|R' - R| = 5$$

$$|R' - 4| = 5 \rightarrow \begin{cases} R' - 4 = 5 \rightarrow R' = 9 \\ R' - 4 = -5 \rightarrow R' = -1 \end{cases}$$

خروج از مرکز یک بیضی افقی برابر $\frac{4}{5}$ و مرکز آن $(-4, -1)$ و طول قطر کوچک آن 6 واحد است.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \Rightarrow c = \frac{4}{5}a$$

$$2b = 6 \rightarrow b = 3$$

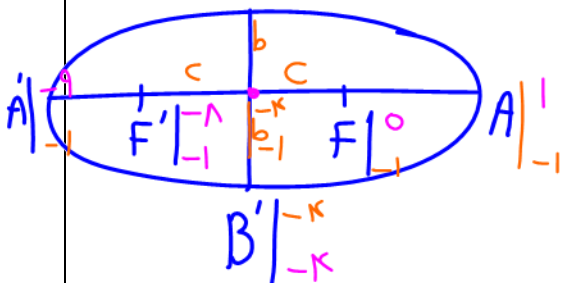
الف) طول قطر کانونی و فاصله کانونی را بدست آورید؟

$$2c = 8 \quad 2a = 10$$

ب) مختصات دو سر قطر کوچک و بزرگ و کانون های بیضی را بدست آورید؟

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 9 + \frac{16}{25}a^2$$

$$\Rightarrow \frac{9}{25}a^2 = 9 \Rightarrow a = 5$$



مؤدار در حتمی

پایان کتاب



دبیرستان دوره دوم امام صادق (ع)

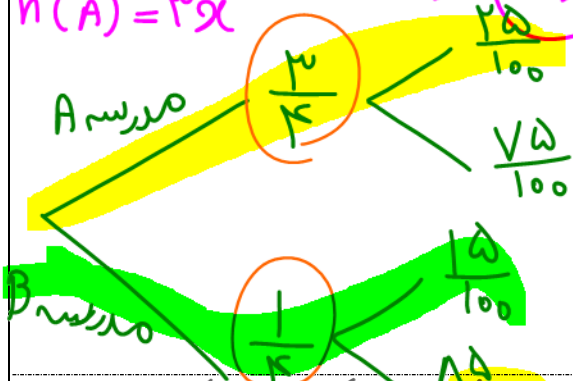
شبيه ساز امتحان نهایی مدرسه A سه برابر مدرسه B دانش آموز دارد ۱۵ درصد دانش آموزان مدرسه A و ۱۵ درصد از دانش آموزان مدرسه B معدل بالای ۱۸ دارند

اگر همه دانش آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر شوند و به تصادف یکی از آنها را انتخاب کنیم با چه احتمالی فرد انتخابی از مدرسه A و با چه احتمالی از مدرسه B انتخاب می شوند؟

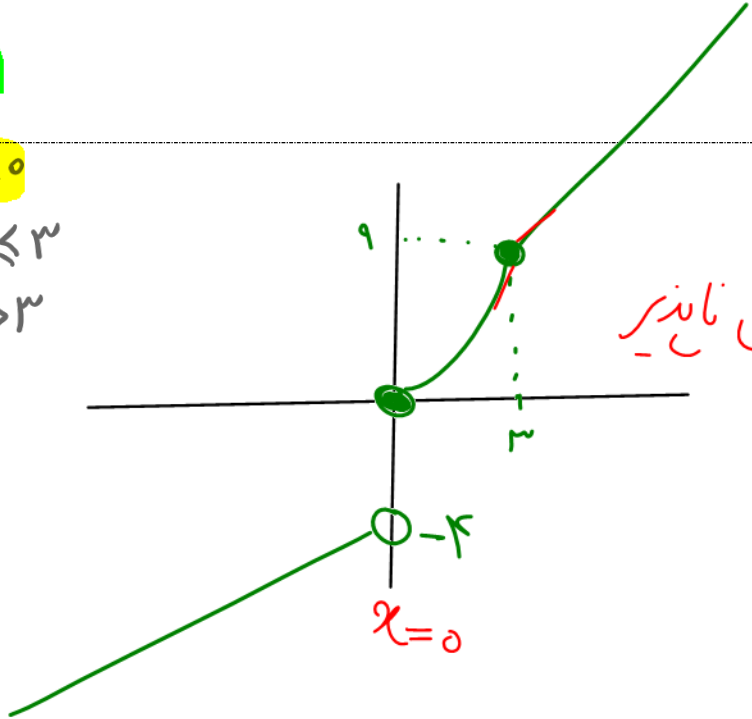
$n(B) = x$
 $n(A) = 3x$

دانش آموز ۲۵

$$\frac{3}{4} \times \frac{25}{100} + \frac{1}{4} \times \frac{15}{100} = 0.225$$



$$f(x) = \begin{cases} 5x - 3 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 3 \\ x + 4 & x > 3 \end{cases}$$



صعدی الیه
 $x=0$ ص- ص- نابزر
 $x=3$ ص- ص- ص-